Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2022, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - 2my + z = 1} \\ \boldsymbol{mx + 2y - z = -1} \\ \boldsymbol{x - y + z = 1} \end{cases}$$

a) **Discuta el sistema en función de los valores de m.**
b) **Resuelva el sistema para el valor** $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$.

Solución:

a) **Discuta el sistema en función de los valores de m.**

Matrices del sistema:

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz ampliada $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Determinante de A:

$$\begin{aligned} |A| &= 1(2-1) - (-2m)(m - (-1)) + 1(-m-2) \\ &= 1 + 2m(m+1) - m - 2 \\ &= 1 + 2m^2 + 2m - m - 2 \\ &= 2m^2 + m - 1 \end{aligned}$$

Igualamos a cero: $2m^2 + m - 1 = 0$.

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

Las raíces son $m_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $m_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$.

iscusión por casos (Teorema de Rouché-Frobenius):

- Caso 1: Si $m \neq 1/2$ y $m \neq -1$. $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. Como A^* es 3×4, $\text{Rg}(A^*) = 3$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3$ (número de incógnitas). El sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.
- Caso 2: Si $m = 1/2$. $|A| = 0$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

  La fila 1 y la fila 3 son idénticas.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-1/2) = 5/2 \neq 0$.

  Por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 2$.

  $$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

  Como $F_1 = F_3$, el rango de A^* también es 2. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$ (número de incógnitas).

El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)** con un grado de libertad.

– Caso 3: Si $m = -1$. $|A| = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 4 \neq 0.$

Por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Consideramos el menor formado por columnas 1, 2 y 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) - 2(-1-(-1)) + 1(1-2) = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Como el único menor de orden 3 relevante es cero, $\mathrm{Rg}(A^*) = 2$.

$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^*) = 2 < 3$ (número de incógnitas). El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)** con un grado de libertad.

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \ m \neq 1/2, m \neq -1 \Rightarrow \ \textbf{S.C.D.} \\ \textbf{Si } \ m = 1/2 \textbf{ o } m = -1 \Rightarrow \ \textbf{S.C.I.} \end{array}}$$

b) Resuelva el sistema para el valor $m = \frac{1}{2}$.

Para $m = 1/2$, el sistema es S.C.I. $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

Como $F_1 = F_3$, podemos eliminar la tercera ecuación. Usamos las dos primeras y tomamos y como parámetro ($y = \lambda$).

$$\begin{cases} x + z = 1 + \lambda \\ \frac{1}{2}x - z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones:

$$(1 + 1/2)x = (1 + \lambda) + (-1 - 2\lambda)$$
$$\frac{3}{2}x = -\lambda \implies x = -\frac{2}{3}\lambda$$

Sustituimos x en la primera ecuación:

$$z = 1 + \lambda - x = 1 + \lambda - \left(-\frac{2}{3}\lambda\right) = 1 + \lambda + \frac{2}{3}\lambda = 1 + \frac{5}{3}\lambda$$

La solución general es $(x, y, z) = (-\frac{2}{3}\lambda, \lambda, 1 + \frac{5}{3}\lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\textbf{Solución para } \ m = 1/2 : (x, y, z) = (-2\lambda/3, \lambda, 1 + 5\lambda/3), \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Sea la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^3e^{-1/x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}}$$

a) **Estudie la continuidad y derivabilidad de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x=0}$.**
b) **Estudie si $\boldsymbol{f(x)}$ presenta algún tipo de simetría par o impar.**
c) **Calcule la siguiente integral: $\boldsymbol{\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}dx}$.**

Solución:

a) **Estudie la continuidad y derivabilidad de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x=0}$.**

Continuidad:
Las dos ramas son continuas (funciones polinómicas, exponenciales o constantes).
Estudiemos el caso concreto x=0:
$f(0)=0$.
Calculamos $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^3e^{-1/x^2}$.

Sea $t=1/x$. Si $x\to 0$, $t\to\pm\infty$.

El límite es $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^3}=0$.

Como $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, la función es continua en $x=0$.

Derivabilidad:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3e^{-1/h^2}}{h}=\lim_{h\to 0} h^2e^{-1/h^2}$$

Sea $t=1/h$.

Si $h\to 0$, $t\to\pm\infty$.

El límite es $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}=0$.

Como $f'(0)$ existe y es 0, la función es derivable en $x=0$.

$$\boxed{\textbf{La función } \boldsymbol{f(x)} \textbf{ es continua y derivable en } \boldsymbol{x=0}.}$$

b) **Estudie si $\boldsymbol{f(x)}$ presenta algún tipo de simetría par o impar.**

Calculamos $f(-x)$:
$f(-x)=(-x)^3e^{-1/(-x)^2}=-x^3e^{-1/x^2}=-f(x)$.
Como $f(-x)=-f(x)$, la función es impar.

$$\boxed{\textbf{La función } \boldsymbol{f(x)} \textbf{ presenta simetría impar.}}$$

c) **Calcule la siguiente integral: $\boldsymbol{\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}dx}$.**

$$I=\int_1^2\frac{x^3e^{-1/x^2}}{x^6}dx=\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{-1/x^2}dx$$

Cambio de variable: $u = -1/x^2 \implies du = (2/x^3)dx \implies (1/x^3)dx = du/2$. Límites: $x = 1 \to u = -1$; $x = 2 \to u = -1/4$.

$$I = \int_{-1}^{-1/4} e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}[e^u]_{-1}^{-1/4} = \frac{1}{2}(e^{-1/4} - e^{-1}).$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \frac{1}{2}\left(e^{-1/4} - e^{-1}\right)}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$

a) **Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.**
b) **Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.**
c) **Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.**

Solución:

a) **Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.**

Vector director $\vec{d_r}$:

Normales: $\vec{n_1} = (2,-1,0)$, $\vec{n_2} = (1,0,-1)$. $\vec{d_r} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,1)$.

Posición en $z = 0$: Si $z = 0$: $x - 0 = -90 \implies x = -90$. $2x - y = 10 \implies 2(-90) - y = 10 \implies -180 - y = 10 \implies y = -190$. Punto $Q(-90,-190,0)$.

$$\boxed{\textbf{Vector director: } \vec{d_r} = (1,2,1). \textbf{ Punto (z=0): } Q(-90,-190,0).}$$

b) **Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.**

Posición más próxima M: Es la proyección ortogonal de $P(1,1,1)$ sobre r. Es la intersección de r con el plano $\pi \perp r$ que pasa por P.

Plano π: $\vec{n_\pi} = \vec{d_r} = (1,2,1)$.
Ecuación: $x+2y+z+D = 0$. Pasa por $P(1,1,1)$: $1+2(1)+1+D = 0 \implies D = -4$. $\pi \equiv x+2y+z-4 = 0$.

Intersección $M = r \cap \pi$:
Paramétricas de r (usando Q y $\vec{d_r}$): $(x,y,z) = (-90+\lambda, -190+2\lambda, \lambda)$. Sustituimos en π: $(-90+\lambda) + 2(-190+2\lambda) + \lambda - 4 = 0$. $-90 + \lambda - 380 + 4\lambda + \lambda - 4 = 0 \implies 6\lambda - 474 = 0 \implies \lambda = 79$.

Punto M: $x = -90 + 79 = -11$. $y = -190 + 2(79) = -32$. $z = 79$. $M(-11,-32,79)$.

$$\boxed{\textbf{La posición más próxima es } M(-11,-32,79).}$$

c) **Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.**

Plano $\sigma : x + y = 2$. Normal $\vec{n_\sigma} = (1,1,0)$. Recta r. Director $\vec{d_r} = (1,2,1)$.

Ángulo α. Calculamos $\sin\alpha = \frac{|\vec{d_r} \cdot \vec{n_\sigma}|}{|\vec{d_r}||\vec{n_\sigma}|}$.

$\vec{d_r} \cdot \vec{n_\sigma} = (1)(1) + 2(1) + 1(0) = 3$. $|\vec{d_r}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$. $|\vec{n_\sigma}| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$.

$\sin\alpha = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\alpha = \arcsin(\sqrt{3}/2) = 60°$.

$$\boxed{\textbf{El ángulo es } \alpha = 60^\circ \textbf{ (o } \pi/3 \textbf{ radianes).}}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7%. Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) **Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.**
b) **Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.**
c) **Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.**

Solución:

a) **Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.**

Sea $p = P(\text{Mujer}) = 0.277$. $q = P(\text{Hombre}) = 1 - p = 0.723$.
$n = 10$. $X=$ Nº mujeres. $X \sim B(10, 0.277)$.

$$P(X=5) = \binom{10}{5}(0.277)^5(0.723)^5 \approx 252 \cdot (0.001568) \cdot (0.1974) \approx 0.0781$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X=5) \approx 0.0781}}$$

b) **Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.**

$P(\text{al menos 1 hombre}) = 1 - P(0 \text{ hombres}) = 1 - P(10 \text{ mujeres}) = 1 - P(X=10)$.

$$P(X=10) = \binom{10}{10}(0.277)^{10}(0.723)^0 = (0.277)^{10} \approx 2.58 \times 10^{-6}$$

$$P(\text{al menos 1 hombre}) \approx 1 - 0.00000258 \approx 0.9999$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(}\text{al menos 1 hombre}\boldsymbol{) \approx 0.9999}}$$

c) **Aproximando por normal, probabilidad de que en 200 hubiera como mínimo un 35% de mujeres.**

$N = 200$. $Y=$ Nº mujeres.
$Y \sim B(200, 0.277)$. Mínimo 35% de mujeres: $0.35 \times 200 = 70$. Buscamos $P(Y \geq 70)$.
Aproximación Normal $Y' \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\mu = Np = 200 \times 0.277 = 55.4$.
$\sigma^2 = Npq = 55.4 \times 0.723 \approx 40.0542$. $\sigma \approx 6.3288$.
$Np > 5, Nq > 5$. Aproximación válida. $Y' \sim N(55.4, 40.0542)$.
$P(Y \geq 70) \approx P(Y' \geq 69.5)$.
Estandarizar: $Z = \frac{Y'-\mu}{\sigma}$. $P(Y' \geq 69.5) = P(Z \geq \frac{69.5-55.4}{6.3288}) \approx P(Z \geq 2.23)$. $P(Z \geq 2.23) = 1 - P(Z < 2.23) \approx 1 - 0.9871 = 0.0129$.

$$\boxed{\textbf{La probabilidad es aproximadamente 0.0129}.}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución:

Calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Definición de variables: Sean x, y, z las edades de Pablo, Alejandro y Alicia.

Planteamiento del sistema:

1. $x + y = 2z + 3$
2. $x + y + z = 45$
3. Premio Pablo - Premio Alicia = 420.
   Constante de proporcionalidad $k = 9450/(x + y + z) = 9450/45 = 210$.
   $kx - kz = 420 \implies 210(x - z) = 420 \implies x - z = 2$.

Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2z + 3 \\ x + y + z = 45 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

Discusión del sistema (Teorema de Rouché-Frobenius): Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos $|A|$:

$$|A| = 1(1(-1) - 1(0)) - 1(1(-1) - 1(1)) + (-2)(1(0) - 1(1))$$

$$|A| = 1(-1) - 1(-1 - 1) - 2(0 - 1) = -1 - 1(-2) - 2(-1) = -1 + 2 + 2 = 3.$$

Como $|A| = 3 \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 3$. El rango de la matriz ampliada A^* también será 3. Como $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3$ (número de incógnitas), el sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Resolución por Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 45 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3(-1 - 0) - 1(-45 - 2) + (-2)(0 - 2)}{3} = 16.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 45 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1(-45 - 2) - 3(-1 - 1) + (-2)(2 - 45)}{3} = 15.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 45 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1(1(2) - 45(0)) - 1(1(2) - 45(1)) + 3(1(0) - 1(1))}{3} = \frac{2 - (2 - 45) + 3(-1)}{3} = 14.$$

Las edades son: Pablo $(x) = 16$, Alejandro $(y) = 15$, Alicia $(z) = 14$.

Cálculo del dinero recibido: Constante $k = 210$ €/año. Premio Pablo $= 16 \times 210 = 3360$ euros. Premio Alejandro $= 15 \times 210 = 3150$ euros. Premio Alicia $= 14 \times 210 = 2940$ euros.

Edades: Pablo 16 años, Alejandro 15 años, Alicia 14 años.
Dinero: Pablo 3360€, Alejandro 3150€, Alicia 2940€.

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Sea $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x^2+1}}$.

a) **Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo [-1,1].**
b) **Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en R.**
c) **Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [-1,1].**

Solución:

a) **Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo [-1,1].**
Hipótesis de Bolzano:

1. Continuidad en [-1,1]: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ ya que $x^2 + 1 \neq 0$. Sí cumple.
2. Signo opuesto en extremos: $f(-1) = -1/2 < 0$. $f(1) = 1/2 > 0$. Sí cumple.

$$\boxed{\textbf{Sí, } \boldsymbol{f(x)} \textbf{ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en [-1,1].}}$$

b) **Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en R.**

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies 1 - x^2 = 0 \implies x = \pm 1$$

Monotonía: Signo de $f'(x)$ depende de $1 - x^2$. $(-\infty, -1) : f'(x) < 0 \implies$ Decreciente. $(-1, 1) : f'(x) > 0 \implies$ Creciente. $(1, \infty) : f'(x) < 0 \implies$ Decreciente.

Extremos: Mínimo relativo en $x = -1$, $f(-1) = -1/2$. Máximo relativo en $x = 1$, $f(1) = 1/2$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Mínimo relativo en } \boldsymbol{(-1, -1/2)}. \\ \textbf{Máximo relativo en } \boldsymbol{(1, 1/2)}.\end{array}}$$

c) **Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [-1,1].** $A = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$. $f(x)$ es negativa en $[-1, 0)$ y positiva en $(0, 1]$. $A = \int_{-1}^{0} -f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$. Primitiva: $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$. $A = [-\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)]_{-1}^{0} + [\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)]_{0}^{1}$ $A = (-\frac{1}{2}\ln 1) - (-\frac{1}{2}\ln 2) + (\frac{1}{2}\ln 2) - (\frac{1}{2}\ln 1) = 0 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - 0 = \ln 2$.

(Alternativa: $f(x)$ es impar, $A = 2\int_{0}^{1} f(x)dx = 2[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)]_{0}^{1} = \ln 2$).

$$\boxed{\textbf{El área es } \boldsymbol{\ln 2} \textbf{ unidades cuadradas.}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Sean el plano $\pi \equiv x+y+z=1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda, \\ z=-1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y el punto $P(0,1,0)$.

a) **Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.**

b) **Halle una ecuación de la recta contenida en el plano que pase por P y sea perpendicular a r_1.**

c) **Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.**

Solución:

a) **Verifique que $r_1 \subset \pi$ y $P \in \pi$.**

r_1 en π: $(1+\lambda)+(1-\lambda)+(-1)=1+1-1=1$. Se cumple. P en π: $0+1+0=1$. Se cumple.

$$\boxed{\textbf{Se verifican ambas condiciones.}}$$

b) **Halle una ecuación de la recta contenida en el plano que pase por P y sea perpendicular a r_1.**

Recta s. Pasa por $P(0,1,0)$. $s \subset \pi$. $s \perp r_1$. $\vec{d_s} \perp \vec{n_\pi} = (1,1,1)$. $\vec{d_s} \perp \vec{d_{r1}} = (1,-1,0)$. $\vec{d_s} = \vec{n_\pi} \times \vec{d_{r1}} =$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,-2)$. $s:(x,y,z)=(0,1,0)+\mu(1,1,-2)=(\mu,1+\mu,-2\mu)$.

$$\boxed{\textbf{La recta es } s \equiv (x,y,z) = (\mu, 1+\mu, -2\mu).}$$

c) **Calcule r_2 paralela a r_1 por P. Halle el área de un cuadrado...**

Recta r_2: Pasa por $P(0,1,0)$. Paralela a $r_1 \implies \vec{d_{r2}} = \vec{d_{r1}} = (1,-1,0)$. $r_2:(x,y,z)=(0,1,0)+t(1,-1,0)=(t,1-t,0)$.

Área del cuadrado: Lado $L = d(r_1,r_2) = d(P,r_1)$. Punto $P_1(1,1,-1) \in r_1$. $\vec{P_1P} = (0-1, 1-1, 0-(-1)) = (-1,0,1)$. $\vec{d_{r1}} = (1,-1,0)$. $\vec{P_1P} \times \vec{d_{r1}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,1)$. $|\vec{P_1P} \times \vec{d_{r1}}| = \sqrt{3}$.

$|\vec{d_{r1}}| = \sqrt{2}$. $L = \sqrt{3}/\sqrt{2}$. Area $= L^2 = 3/2$.

$$\boxed{r_2 \equiv (x,y,z) = (t, 1-t, 0). \quad \textbf{Área del cuadrado} = \frac{3}{2} u^2.}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.**
b) **Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.**
c) **Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.**

Solución:

Definición de sucesos: S_B, S_N, P_B, P_N, P_C.

Probabilidades: $P(S_B) = 2/3$. $P(S_N) = 1/3$.

$P(P_B|S_B) = 2/9, P(P_N|S_B) = 2/9, P(P_C|S_B) = 5/9$

$P(P_B|S_N) = 2/10, P(P_N|S_N) = 4/10, P(P_C|S_N) = 4/10.$

a) **P(pañuelo con color diferente al sombrero).** Suceso $= (S_B \cap (P_N \cup P_C)) \cup (S_N \cap (P_B \cup P_C))$.

$$P(\text{dif}) = P(S_B)P(P_N \cup P_C|S_B) + P(S_N)P(P_B \cup P_C|S_N)$$
$$P(\text{dif}) = (2/3)(7/9) + (1/3)(6/10) = 14/27 + 1/5 = 97/135$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(}\text{color diferente}\boldsymbol{)} = \mathbf{\frac{97}{135}}}$$

b) **P(al menos uno negro).** Complementario: P(ambos blancos) $= P(S_B \cap P_B)$.

$$P(S_B \cap P_B) = P(P_B|S_B)P(S_B) = (2/9)(2/3) = 4/27$$
$$P(\text{al menos uno negro}) = 1 - 4/27 = 23/27$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(}\text{al menos uno negro}\boldsymbol{)} = \mathbf{\frac{23}{27}}}$$

c) **P(sombrero negro | pañuelo cuadros).** Buscamos $P(S_N|P_C)$. Bayes:

$$P(S_N|P_C) = \frac{P(P_C|S_N)P(S_N)}{P(P_C)}$$
$$P(P_C) = P(P_C|S_B)P(S_B) + P(P_C|S_N)P(S_N)$$
$$P(P_C) = (5/9)(2/3) + (4/10)(1/3) = 10/27 + 4/30 = 68/135$$
$$P(S_N|P_C) = \frac{(4/10)(1/3)}{68/135} = \frac{4/30}{68/135} = \frac{2/15}{68/135} = \frac{2}{15} \cdot \frac{135}{68} = \frac{9}{34}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(S_N|P_C) = \frac{9}{34}}}$$